

APPLIED MATHEMATICS - III

Time : 2.30 Hours]

[Maximum Marks : 50

[Minimum Marks : 17

NOTES :

- Attempt all questions.
- Students are advised to specially check the Numerical Data of question paper in both versions. If there is any difference in Hindi Translation of any question, the students should answer the question according to the English version.
- Use of Pager and Mobile Phone by the students is not allowed.

Q1) Answer any ten parts of the following :

[10 × 1 = 10]

- If $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$ find BA
- If $z = x \sin y + y \sin x$, prove that $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$
- Solve the equation $(e^x + 1) \cos x \, dx + e^x \sin x \, dy = 0$
- Find the value of $\int_0^1 x^6 (1-x)^7 \, dx$
- A box contains 10 bulbs, in which 3 are defective if at random 5 bulbs are drawn, find the probability of 2 bulbs are defective
- Define symmetric matrix
- If $u = a(x^2 + y^2)$ and $v = b(x^2 - y^2)$, find, $\int \left(\frac{u, v}{x, y} \right)$
- Solve $\sin^{-1} \left(\frac{dy}{dx} \right) = x + y$
- Evaluate $L\{\sin t - \cos t\}^2$
- If $y = e^{-x} \cos x$, prove that $\frac{d^4 y}{dx^4} + 4y = 0$
- Prove that $\text{div } \vec{r} = 3$
- Evaluate $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x + y + z) \, dz \, dx \, dy$

Q2) Answer any five parts of the following :

[5 × 2 = 10]

- Find unit matrix of $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$
- If $u = e^{yz}$, find the values of $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ and $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

- c) Solve the equation $(x^2 - y^2)dx + 2xy dy = 0$
- d) Evaluate $L\{e^{-t}(3 \sinh 2t - 5 \cosh 2t)\}$
- e) If $y = \cos(ax + b)$, find $\frac{d^3 y}{dx^3}$
- f) If the temperature of air is 30°C . The temperature of a mass becomes 70°C from 100°C in 15 minutes. Find the time when temperature becomes 40°C .
- g) Prove that $(\vec{a} \cdot \nabla) \vec{r} = \vec{a}$

Q3) Answer any two parts of the following :

[2 × 5 = 10]

- a) If $u = \tan^{-1}\left(\frac{x^3 + y^3}{x + y}\right)$, prove $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u$.
- b) If $\vec{r} = 6(t + t^2)\hat{i} + 3(t^2 + 1)\hat{j} - 3(t + 1)^2\hat{k}$, evaluate $\int_2^3 \vec{r} dt$
- c) Solve $\frac{d^4 y}{dx^4} - 5 \frac{d^3 y}{dx^3} + 6 \frac{d^2 y}{dx^2} + 4 \frac{dy}{dx} - 8y = 0$

Q4) Answer any two parts of the following :

[2 × 5 = 10]

- a) Find Eigen vectors of the matrix $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$
- b) If $x = r \sin \theta \cos \phi$, $y = r \sin \theta \sin \phi$, $z = r \cos \theta$. Prove that $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = r^2 \sin \theta$
- c) Evaluate $\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin \theta}} \times \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin \theta} d\theta$

Q5) Answer any two parts of the following :

[2 × 5 = 10]

- a) Evaluate $L^{-1}\left\{\frac{6}{3p-2} + \frac{2+3p}{4p^2+9}\right\}$
- b) Solve $\frac{d^2 y}{dx^2} + a^2 y = \sin ax$
- c) During war 1 ship out of 9 was sank on an average in making a certain voyage. What was the probability that exactly 3 out of 9 of ships would arrive safely.

नोट : सभी प्रश्न हल कीजिये ।

प्र. 1) निम्नलिखित में कोई दस भाग हल कीजिये ।

[10 × 1 = 10]

- यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$ BA का मान ज्ञात करो ।
- यदि $z = x \sin y + y \sin x$, सिद्ध करो $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$
- समीकरण $(e^x + 1) \cos x \, dx + e^x \sin x \, dy = 0$ को हल करो ।
- $\int_0^1 x^6 (1-x)^7 \, dx$ का मान ज्ञात करो ।
- एक बाक्स में 10 बल्ब हैं जिसमें तीन खराब हैं यादृच्छया 5 बल्ब निकाले जाते हैं 2 बल्बों के खराब होने की प्रायिकता ज्ञात करो ।
- सममित आव्यूह की परिभाषा दीजिये ।
- यदि $u = a(x^2 + y^2)$ तथा $v = b(x^2 - y^2)$, $J\left(\frac{u, v}{x, y}\right)$ का मान ज्ञात करो ।
- समीकरण $\sin^{-1}\left(\frac{dy}{dx}\right) = x + y$ को हल करो ।
- $L\{\sin t - \cos t\}^2$ का मान ज्ञात करो ।
- यदि $y = e^{-x} \cos x$, सिद्ध करो कि $\frac{d^4 y}{dx^4} + 4y = 0$
- सिद्ध करो कि $\operatorname{div} \vec{r} = 3$
- $\int_0^3 \int_0^2 \int_0^1 (x + y + z) \, dz \, dx \, dy$ का मान ज्ञात करो ।

[5 × 2 = 10]

प्र. 2) निम्नलिखित में कोई पाँच भाग हल कीजिये ।

- आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ की इकाई आव्यूह ज्ञात करो ।
- यदि $u = e^{xy}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ तथा $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ के मान ज्ञात करो ।
- समीकरण $(x^2 - y^2)dx + 2xy \, dy = 0$ को हल करो ।
- $L\{e^{-t}(3 \sinh 2t - 5 \cosh 2t)\}$ का मान ज्ञात करो ।

- e) यदि $y = \cos(ax + b)$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ का मान ज्ञात करो ।
- f) यदि वायु का तापमान 30°C है किसी पदार्थ का 15 मिनट में तापमान 100°C से 70°C हो जाता है चिन्तन समय के तापमान 45°C हो जायेगा ।
- g) सिद्ध करो $(\vec{a} \cdot \nabla) \vec{r} = \vec{a}$

प्र.3) निम्नलिखित में कोई दो भाग हल कीजिये ।

[2 × 5 = 10]

- a) यदि $u = \tan^{-1} \left(\frac{x^3 + y^3}{x + y} \right)$, सिद्ध करो $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u$.
- b) यदि $\vec{r} = 6(t + t^2)\hat{i} + 3(t^2 + 1)\hat{j} - 3(t + 1)^2\hat{k}$, $\int_2^3 \vec{r} dt$ का मान ज्ञात करो ।
- c) समीकरण $\frac{d^4y}{dx^4} - 5\frac{d^3y}{dx^3} + 6\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} - 8y = 0$ को हल करो ।

प्र.4) निम्नलिखित में कोई दो भाग हल कीजिये ।

[2 × 5 = 10]

- a) आव्यूह $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ के Eigen सदिश ज्ञात करो ।
- b) यदि $x = r \sin \theta \cos \phi$, $y = r \sin \theta \sin \phi$, $z = r \cos \theta$. सिद्ध करो $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = r^2 \sin \theta$
- c) $\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin \theta}} \times \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin \theta} d\theta$ का मान ज्ञात करो ।

प्र.5) निम्नलिखित में कोई दो भाग हल कीजिये ।

[2 × 5 = 10]

- a) $L^{-1} \left\{ \frac{6}{3p-2} + \frac{2+3p}{4p^2+9} \right\}$ का मान ज्ञात करो ।
- b) समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = \sin ax$ को हल करो ।
- c) यदि औसतन समुद्री मात्रा के मध्य 9 जहाजों में एक जहाज डूब जाता है । 9 जहाजों में से 3 के सुरक्षित पहुँचने की क्या प्रायिकता होगी ।

□□□